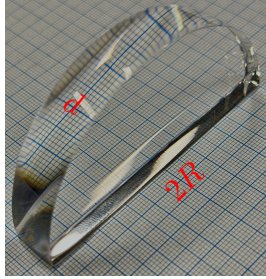


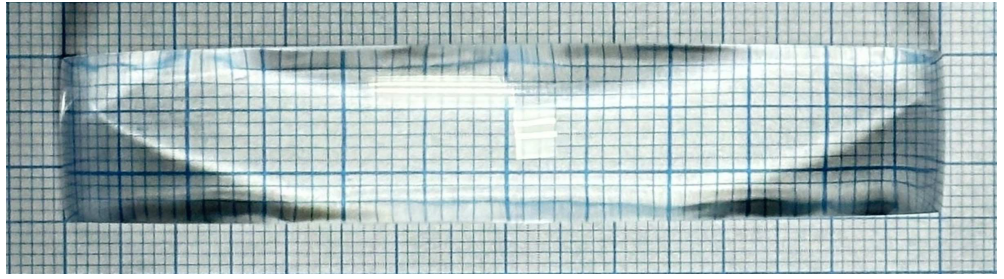
Геометријска оптика акрилног полудиска

Диск дебљине $d = 15 \text{ mm}$ и полупречника $R = 40 \text{ mm}$, направљен од прозирног акрила¹, пресечен је дуж једног од својих пречника. Видети фотографију (i). Добијени полудиск је положен на хоризонтални mm-папир тако да је равна површ дуж које је диск преполовљен окренута према доле, а конвексна цилиндрична површ окренута према горе. Затим је овај полудиск фотографисан одозго. Оптичка оса фотоапарата је вертикална и пролази кроз центар полудиска који тачно лежи на једној од главних линија mm-папира, док је објектив фотоапарата подешен на висини h мереној од од равни mm-папира. Видети фотографију (ii).

(i)



(ii)



Коришћењем ових фотографија и анализом одговарајућих апсолутних грешки, насталих као резултат читавања са mm-папира, проценити бројне вредности индекса преламања акрила n , као и висине h . Објектив фотоапарата није постављен близу површине полудиска. (⊗⊗)

Решење

Како у формулацији проблема није назначена класа тачности, онда се за апсолутну (систематску) грешку читавања дужине са mm-папира узима вредност половине најмањег подеока: $\Delta x = 0.5 \text{ mm}$.

Видимо да полудиск формира лик координатне мреже mm-папира на истом месту где се налази и сам mm-папир (објекат). Ефективно, полудиск се може представити као комбинација призме у облику квадра приближне висине R и танког план-конвексног сочива чији радијус конвексне површине износи $+R$. Видети слику (iii). Геометријска оптика се неретко упрошћује употребом параксијалне апроксимације, што је управо овде искоришћено.

Нека се извор светлости $\mathcal{S}_0$ налази у равни mm-папира. Лик $\mathcal{S}_1$ који се формира преко призме се налази на висини

$$y = \frac{n-1}{n}R,$$

с обзиром да је лик $\mathcal{S}_1$ на дубини $p = R - y$ која је n пута плића од R . Даље, предмет $\mathcal{S}_1$ за сочиво се налази на удаљености $p = R - y$, а удаљеност ℓ коначног лика $\mathcal{S}_2$ од сочива се може лако одредити коришћењем формуле сочива

$$\frac{n-1}{R} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\ell} \Rightarrow \frac{n-1}{R} = \frac{n}{R} + \frac{1}{\ell} \Rightarrow \ell = -R.$$

Негативан знак у последњој једначини означава да је лик имагинаран; плус, лик се управо налази у равни mm-папира. Ово је очекивано јер се полудиск понаша као лупа. Затим, увећање полудиска налазимо као $u = |\ell|/p = n$. Јасно је да $(30.0 \pm 0.5) \text{ mm}$ на mm-папиру под полудиском одговара $(20.0 \pm 0.5) \text{ mm}$ на mm-папиру без полудиска. На тај начин грубо налазимо да је $n = (1.50 \pm 0.06)$. Међутим, строго посматрано, увећање се поклапа са n само у непосредној близини оптичке осе. Због тога ћемо посматрати линеарну зависност увећане координате

¹Акрил спада у провидне материјале, а код нас је познат и под називом клирит или плексиглас. Хемијски, припада групи синтетичких полимера: *PMMA* (полиметил метакрилат).

x од оригиналне x_0 на mm-папиру без акрила, а индекс преламања одредити из зависности: $x = nx_0$, и то у неколико тачака. Видети одговарајући код писан у R-у испод, а уколико је то потребно, може се користити [R интерактивна платформа](#) за покретање и компајлирање R програмских кодова. Примећујемо да овај нумерички поступак мало утиче на претходну процену за n , доводећи до

$$n = (1.49 \pm 0.06),$$

што иначе није унапред очигледно.

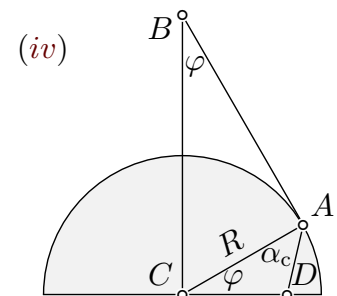
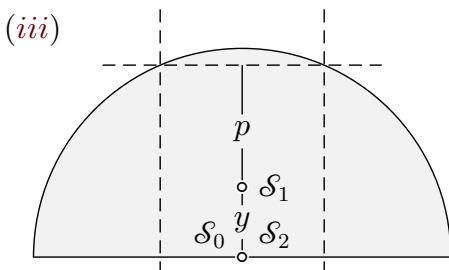
```
# --- data set ---
x_0<-c(-8.00, -6.00, -4.00, -2.00, 2.00, 4.00, 6.00, 8.00)
x<-c(-12.00, -9.00, -6.00, -3.00, 3.00, 6.00, 9.00, 12.00)
dx<-rep(0.5, length(x))
dx_0<-rep(0.5, length(x_0))

# --- parameters ---
nsim<-5000
set.seed(123)

# --- vectorized Monte Carlo ---
N<-length(x)
eps_x<-matrix(rnorm(N*nsim), nrow=N, ncol=nsim)
eps_x0<-matrix(rnorm(N*nsim), nrow=N, ncol=nsim)
x_sim<-matrix(x, nrow=N, ncol=nsim)+eps_x*matrix(dx, nrow=N, ncol=nsim)
x0_sim<-matrix(x_0, nrow=N, ncol=nsim)+eps_x0*matrix(dx_0, nrow=N, ncol=nsim)
num<-colSums(x_sim*x0_sim)
den<-colSums(x0_sim^2)
n_hats<-num/den
n_hats<-n_hats[is.finite(n_hats)]

# --- results ---
n<-mean(n_hats)
dn<-sd(n_hats)
cat(sprintf("n=%.6f\ndn=%.6f\n", n, dn))
```

Литературно, индекс преламања акрила на таласној дужини од око 555 nm (најинтензивнија зеленкаста боја у видљивом спектру) на собној температури износи око 1.492, што заиста упада у интервал процењених вредности.



На слици (iv) је дат гранични случај зрака који се прелама. Наиме, услед појаве тоталне унутрашње рефлексije

$$\alpha_c = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \Delta\alpha_c = \frac{\Delta n}{n\sqrt{n^2-1}} \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \boxed{\alpha_c = (42 \pm 2)^\circ}.$$

Посматрач, смештен у тачки B , на висини $h \equiv \overline{CB}$, може видети само координатну мрежу која лежи са леве стране тачке D , дужине $x = \overline{CD}$. Зрак DA пада на сферну границу под

углом тоталне унутрашње рефлексije α_c . На основу друге фотографије можемо одредити да је $x = (30.0 \pm 0.5)$ mm. Применом синусне теореме на $\triangle DAC$:

$$\frac{R}{\sin(\alpha_c + \varphi)} = \frac{x}{\sin \alpha_c} = nx \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{R}{nx}\right) - \alpha_c, \quad \Delta\varphi = \frac{x\Delta n + n\Delta x}{nx\sqrt{n^2x^2/R^2 - 1}} \frac{180^\circ}{\pi} + \Delta\alpha_c,$$

те је решење за φ по којем објектив фотоапарата није постављен близу површине полудиска:

$$\boxed{\varphi = (21 \pm 4)^\circ}.$$

Како је $h = \frac{R}{\sin \varphi}$, а $\Delta h = \frac{R \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{\pi \Delta \varphi}{180^\circ}$, имамо да је

$$\boxed{h = (11 \pm 2) \text{ cm}}.$$