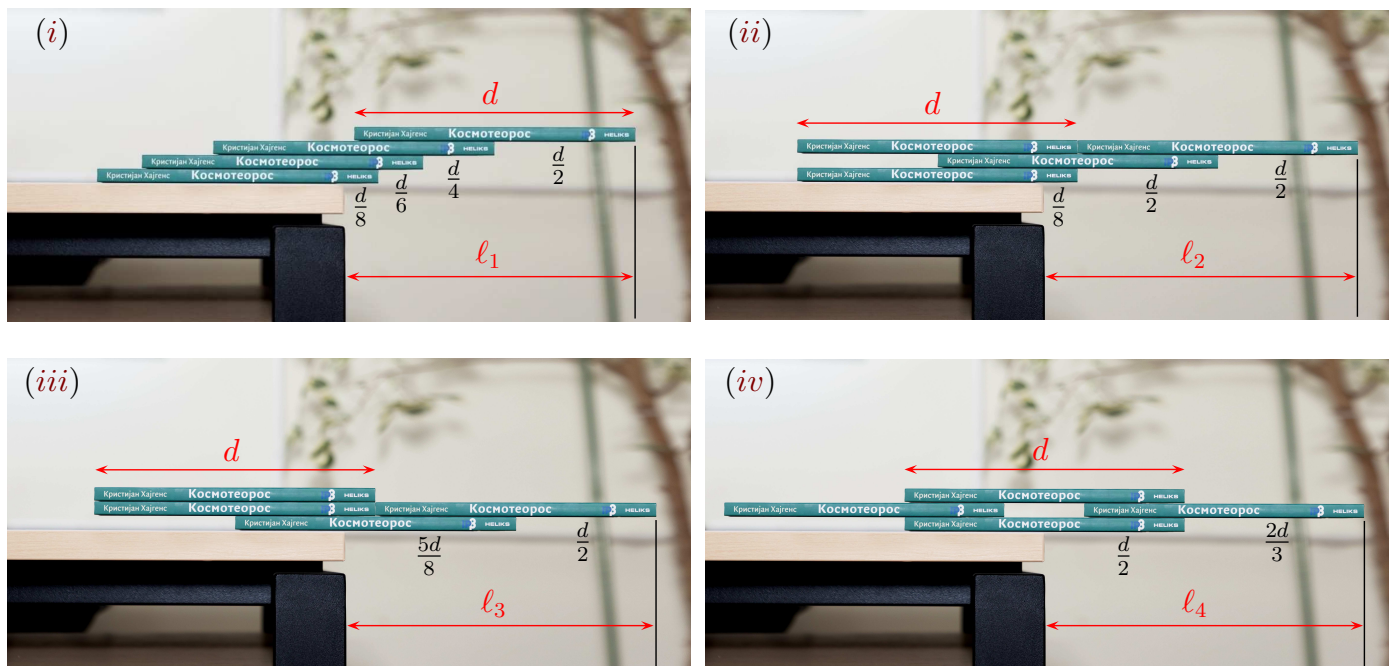


Космотеорос¹ на ивици равнотеже: феномен максималне истурености

На располагању су нам четири идентичне књиге, свака дужине $d = 24$ cm. Књиге треба наслагати тако да остану у равнотежи и да крај једне од њих штрчи највише могуће у односу на ивицу хоризонталног стола, што ћемо окарактерисати дужином ℓ_k . Дата су четири сценарија за $\ell_k > d$. У сваком ћемо мерити хоризонтално растојање између ивице стола и десног краја најистуреније књиге, а умањено за d , тј. $\Delta\ell_k \equiv \ell_k - d$. За четири случаја представљена на слици: (i), (ii), (iii), и (iv) ово растојање, $\Delta\ell_k$, редом износи: 1 cm, 3 cm, 3 cm, и 4 cm, што последњи случај издваја као онај са наизглед максималном истуреношћу. Међутим, ту није крај. Показати да постоји побољшање, тј. још један сценарио *шачно* у којем крајња књига даје истуреност $\Delta\ell_{\max} > \Delta\ell_k$, $\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Скицирати случај тако напактованих књига и наћи бројну вредност од $\Delta\ell_{\max}$.



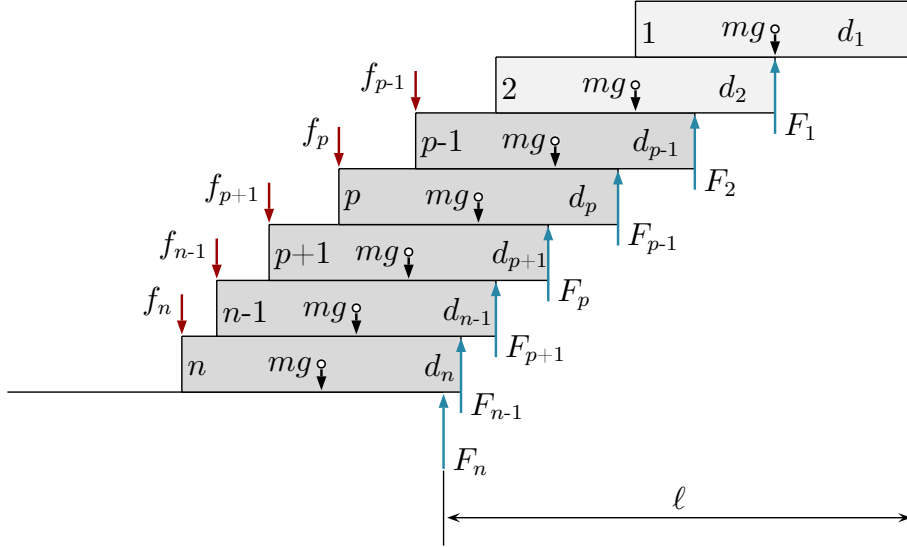
Сва трећа су занемарљива. Књиге су хомогена крута тела облика квадрa, и ређају се паралелно уздуж једна на другу остајући у равнотежи тако да њихове насловне стране леже хоризонтално. Аутор фотографија: © 2025 Džodan..... (☼☼☼)

Решење

Нека је N укупан број књига којим располажемо. Специјално, $N = 4$ у нашем случају. Узмимо да је n онај број књига који се пакује бочним нагомилавањем удаљавајући се удесно од ивице стола, где је $1 \leq n \leq N$. Означимо са 1 књигу која се налази на врху, са 2 ону испод ње, и тако редом, а напослетку са n књигу која лежи на столу. Десни крај сваке од њих, рецимо p -те где је $1 \leq p \leq n$, је померен удесно за d_p у односу на десни крај оне индексираних са $(p+1)$ која лежи испод, док се истуреност десног краја n -те књиге мери у односу на ивицу стола. Даље, нека се преосталих $N - n$ књига распоређује тако да формира противтежу овом броју од n књига које се пакују удесно од ивице стола. Скупина од ових $N - n$ књига делује силама интензитета f_p наниже на сваку p -ту књигу, чије се нападне тачке премештају улево због граничне равнотеже, јер по услову задатка тражимо максимум истурености. Нека је t укупан број ових сила: $f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n-m+1}$, који по природи ствари не може бити већи од $N - n$, нити од n , у зависности који од ова два броја је мањи.

¹Преведено на српски језик, *Космотеорос* Кристијана Хајгенса представља издање у едицији књига од значаја за културу науке. Међу издавачима се налази и Институт за физику у Београду, први институт од националног значаја за Републику Србију.

Дакле, може се догодити да извештан број књига из скупине од њих $N - n$ није у непосредном контакту са горе поменутом скупином од n књига које су приказане на цртежу испод (без $N - n$).



С друге стране, број f_p сила, тј. m , може у најмању руку бити 0 уколико је $n = N$, или 1 за $n < N$, што формално записујемо као

$$\min \{1, N - n\} \leq m \leq \min \{n, N - n\}. \quad (1)$$

На тај начин, проналажењем свих уређених парова (m, n) се претражују све могуће конфигурације напактованих књига које би гарантовале максималну истуреност књига у односу на ивицу стола.

Даље, на сваку p -ту књигу из скупа од n књига са слике делује сила интензитета F_p навише као нормална реакција која потиче од књиге $p + 1$ испод, тј. од површине стола за $p = n$. Нападне тачке ових сила се налазе на десним крајевима књига како бисмо максимизирали истуреност доводећи равнотежу на сам руб одрживости. Наравно, поред књига на које делују силе f -типа (m тамно сивих, ако их има), ту су и оне $(n - m)$ светло сивих, ако их има) које нису оптерећене скупом од $N - n$ књига. Стога се лако показује да важи

$$F_n = N \times mg, \text{ као и } F_p = p \times mg, \quad d_p = \frac{d}{2p}, \text{ за } 1 \leq p \leq n - m, \quad (2)$$

где је mg тежина књиге, а d њена дужина. На тај начин за истуреност ℓ налазимо да је

$$\ell = \sum_{p=1}^n d_p = \sum_{p=1}^{n-m} \frac{d}{2p} + \sum_{p=n-m+1}^n d_p, \quad (3)$$

што показује да је ℓ функција $\ell(d_{n-m+1}, d_{n-m+2}, \dots, d_n)$ и стога ћемо се фокусирати на једначину равнотеже момената сила p -те књиге у односу на осу која пролази кроз њену леву ивицу како бисмо избегли појављивање силе f_p у једначини. Односно,

$$F_p \times (d - d_p) = mg \times \frac{d}{2} + F_{p-1} \times d. \quad (4)$$

Фокусирајмо се сада на скуп од m тамно сивих књига код којих су F_p и d_p непознанице. Лако је увидети да се ℓ може посматрати као функција $\ell(F_{n-m+1}, F_{n-m+2}, \dots, F_n)$, те је стога подесно

изразити d_p и d_{p+1} преко ових сила, јер се једино у њиховим изразима појављује сила F_p . Према томе, за $1 \leq p \leq n-1$ имамо да је у случају $n > 1$

$$\frac{d_p}{d} = 1 - \frac{mg}{2F_p} - \frac{F_{p-1}}{F_p}, \quad \frac{d_{p+1}}{d} = 1 - \frac{mg}{2F_{p+1}} - \frac{F_p}{F_{p+1}}, \quad \text{где је } F_0 = 0, F_n = N \times mg, \quad (5)$$

па се у функцији ℓ променљива F_p појављује кроз збир $d_p + d_{p+1}$, а због услова којим се сада пребројава p мора да важи да је $n - m + 1 \leq n - 1$. Ово се своди на услов да је $m \geq 2$, јер априори имамо $m - 1$ непознатих сила F -типа. Како нам је циљ да се ℓ екстремизује, онда $\forall p \in \{n - m + 1, \dots, n - 1\}$ мора да важи низ од $m - 1$ следећих једначина

$$\frac{\partial \ell}{\partial F_p} = 0. \quad (6)$$

Овај услов се своди на низ од $m - 1$ једначина

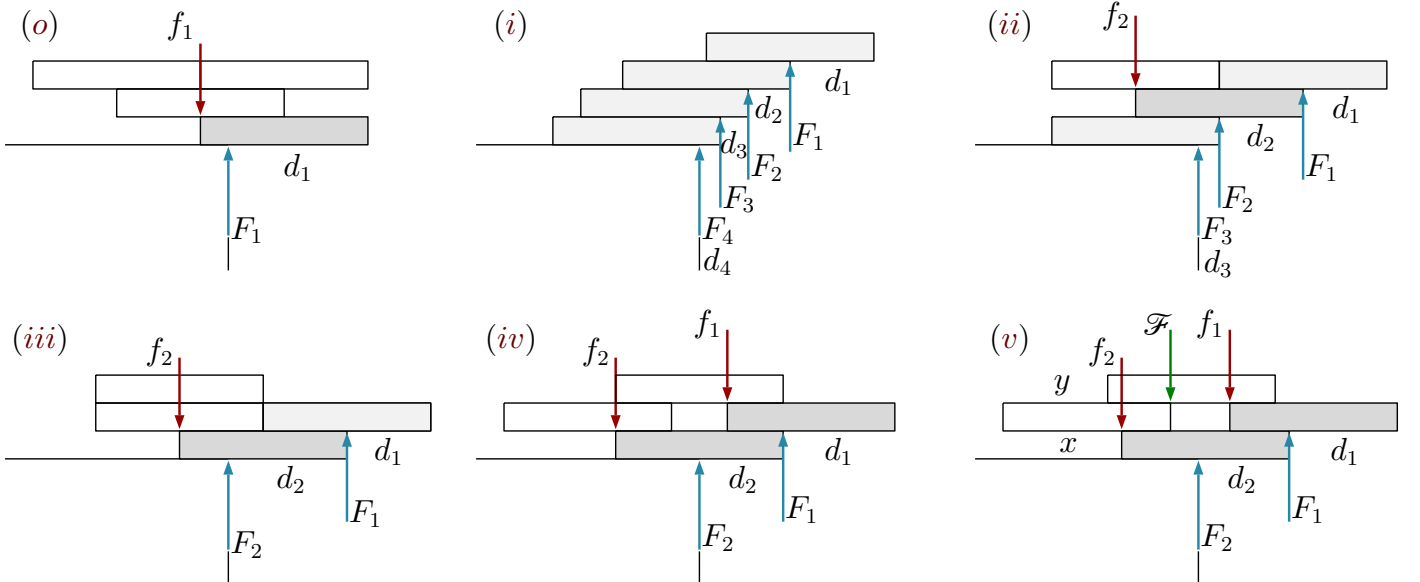
$$F_p^2 = \left(\frac{mg}{2} + F_{p-1} \right) \times F_{p+1}, \quad \forall p \in \{n - m + 1, \dots, n - 1\}, \quad (7)$$

што нема смисла разматрати када је $n = N$, јер је тада $m = 0$, док је $\ell = \sum_{p=1}^N \frac{d}{2p}$. Такође, у случају када је $m = 1$, тј. када само једна сила f -типа делује на p -ту књигу, рецимо, тада се не ослањамо на једначину (7). Како је $F_{p-1} = (p-1) \times mg$, једначина (4) се своди на

$$\frac{d_p}{d} = 1 - \frac{2p-1}{2} \frac{mg}{F_p}. \quad (8)$$

Овај израз примењујемо за оно $p \in \{1, \dots, n \geq 1\}$ на које делује сила $f_p = (N - n) \times mg$ (једина постојећа). Наравно центар масе скупине од $N - n$ књига у овом случају мора лежати на правцу деловања силе f_p .

У нашем случају, $N = 4$, налазимо пет (m, n) конфигурација: $(0, 4)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, и $(2, 2)$. Видимо да само у последњем случају (једини случај где је $m = 2$) можемо очекивати максимум истурености, када примењујемо једначину (7). Но пре тога скицирајмо ових пет могућих случајева, при чему слике (iv) и (v) припадају конфигурацији $(2, 2)$, где ће једино ова последња довести до $\Delta \ell_{\max} = \Delta \ell_5 \equiv \ell_5 - d$, испуњавајући услов дат у (7). Случајеви (i), (ii), (iii), и (iv), који су већ приказани у формулацији задатка, не задовољавају услов (7). Исто важи и за случај (o) у којем ће се испоставити да важи да је $\Delta \ell_0 \equiv \ell_0 - d < 0$, због чега природно није било интереса да се $k = 0$ прикаже у формулацији задатка. Ипак, у свим ситуацијама почев од (o) закључно до (v) примењујемо једначину (8) за $n = 1$ када је и $p = 1$, односно (5) за $n > 1$.



Случај (o) : $(m, n) = (1, 1)$

У овој ситуацији имамо три књиге ($N - n = 4 - 1 = 3$) које балансирају једну истурену књигу ($p = n = 1$), где је $\ell_1 = d_1 = \frac{7d}{8}$ на основу израза (8). Постоји још једна конфигурација која не утиче на резултат у којој су три књиге, које осигуравају противтежу слева, напакване једна на другу по вертикали. У сваком случају сила f_1 даљује на правцу центра масе овог скупа од три књиге. Напослетку, $\Delta\ell_0 = d_1 - d = -\frac{3}{24} \times d = -3 \text{ cm}$.

Случај (i) : $(m, n) = (0, 4)$

У овој ситуацији све четири књиге ($p \in \{1, \dots, n = 4\}$) се гомилају удесно, без оптерећења са леве стране ($m = 0$), па је на основу (5): $\ell_1 = \sum_{p=1}^4 \frac{d}{2p} = \frac{25}{24} \times d$, док је $F_p = p \times mg$. Коначно, $\Delta\ell_1 = \ell_1 - d = \frac{1}{24} \times d = 1 \text{ cm}$.

Случај (ii) : $(m, n) = (1, 3)$

У овој ситуацији имамо једну књигу ($N - n = 4 - 3 = 1$) која балансира три истурене књиге ($p \in \{1, \dots, n = 3\}$) и то преко $p = 2$ (једина могућа опција), где је $\ell_2 = \sum_{p=1}^3 d_p$, док се d_p одређује на основу (5). Како је $F_1 = mg$, $F_2 = 3mg$, и $F_3 = 4mg$, добија се да је $d_1 = d/2$, $d_2 = d/2$, и $d_3 = d/8$. На тај начин, $\ell_2 = \frac{27}{24} \times d$, па је $\Delta\ell_2 = \ell_2 - d = \frac{3}{24} \times d = 3 \text{ cm}$.

Случај (iii) : $(m, n) = (1, 2)$

У овој ситуацији имамо две књиге ($N - n = 4 - 2 = 2$) које балансирају две истурене књиге ($p \in \{1, n = 2\}$) и то преко $p = 2$ (једина могућа опција за $m = 1$), где је $\ell_3 = \sum_{p=1}^2 d_p$, док се d_p одређује на основу (5). Како је $F_1 = mg$ и $F_2 = 4mg$, добија се да је $d_1 = d/2$ и $d_2 = 5d/8$. На тај начин, $\ell_3 = \frac{27}{24} \times d$, па је $\Delta\ell_3 = \ell_3 - d = \frac{3}{24} \times d = 3 \text{ cm}$.

Случај (iv) : $(m, n) = (2, 2)$, $\Delta\ell_4 \neq \Delta\ell_{\max}$

У овој ситуацији имамо две књиге ($N - n = 4 - 2 = 2$) које балансирају две истурене књиге ($p \in \{1, n = 2\}$) преко $p = 1$ и $p = 2$ ($m = 2$), где је $\ell_4 = \sum_{p=1}^2 d_p$, док се d_p одређује на основу (5). Знамо да је $F_2 = 4mg$, али нам је F_1 непозната. Ако узмемо да је случај симетричан око ивице стола, онда је $F_1 = f_2 = 3mg/2$, што доводи $d_1 = 2d/3$ и $d_2 = d/2$. Како је $\ell_4 = \frac{28}{24} \times d$, то је $\Delta\ell_4 = \ell_4 - d = \frac{4}{24} \times d = 4 \text{ cm}$.

Случај (v) : $(m, n) = (2, 2)$, $\Delta\ell_5 = \Delta\ell_{\max}$

У овој ситуацији такође имамо две књиге ($N - n = 4 - 2 = 2$) које балансирају две истурене књиге ($p \in \{1, n = 2\}$) преко $p = 1$ и $p = 2$ ($m = 2$), где је $\ell_5 = \sum_{p=1}^2 d_p$, док се d_p одређује на основу (5). Знамо да је $F_2 = 4mg$, али ћемо F_1 одредити из једначине (7), где је $F_0 = 0$. Одавде налазимо да је $F_1 = \sqrt{2}mg$, па је $d_1 = (8 - \sqrt{8})d/8$ и $d_2 = (7 - 2\sqrt{2})d/8$. Како је $\ell_5 = \frac{45 - 12\sqrt{2}}{24} \times d$, то је $\Delta\ell_5 = \ell_5 - d = \frac{4 + 17 - 12\sqrt{2}}{24} \times d$. Односно, $\Delta\ell_5$ је заиста $\Delta\ell_{\max}$, јер је

$$\Delta\ell_5 = 4 \text{ cm} + (\sqrt{289} - \sqrt{288}) \text{ cm} = 4.029437... \text{ cm} > \Delta\ell_4 = 4 \text{ cm}. \quad (9)$$

С друге стране, $\Delta\ell_5$ се може изразити у функција од F_1 ако применимо обе релације дате у (5), а максимална вредност истурености се може одредити применом *аритметичко-геометријске* неједнакости, дакле без икаквог позивања на диференцијални рачун. Другим речима,

$$\Delta\ell_5(F_1) = \frac{7d}{8} - \frac{d}{2\sqrt{2}} \left(\frac{F_1}{mg\sqrt{2}} + \frac{mg\sqrt{2}}{F_1} \right), \quad (10)$$

те је $\Delta\ell_5(F_1) = \Delta\ell_{\max}$ за $F_1 = mg\sqrt{2}$.

Алтернативно је могуће извести горњи резултат за $\Delta\ell_5$ из осам алгебарских једначина које произилазе из равнотежних услова (две за сваку књигу). Полазећи од ученог растућег тренда за истуреност у формулацији задатка, при преласку од случаја (i) ка случају (iv), се добија решење које не гарантује јединственост, односно глобалност максимума, али омогућава интуитивно идентификовање конфигурације која води ка $\Delta\ell_5$. Сходно томе, претпоставићемо да се тај максимум крије у некој генерализованој конфигурацији датој на слици (v). Без умањивања општости, све величине које имају димензије дужине се могу изразити преко d , док се силе могу изразити у јединицама mg . На пример, једначине равнотеже момената сила се могу записати у односу на леву ивицу крајње леве књиге, од које су леве ивице књига на дну и врху редом удаљене за x и y . Силе нормалних реакција: F_1 , F_2 , f_1 , f_2 , и ново уведена сила нормалне реакције $\mathcal{F}$ која не припада раније поменутих фамилијама, могуће је елиминисати након дужих алгебарских трансформација. На крају, y , d_1 , и d_2 се могу изразити преко x , па се максимум истурености $d_1 + d_2$ може наћи диференцирањем по x и сл. Међутим, будући да се полази од 9 величина, систем има тачно једну слободну променљиву ($9 - 8 = 1$). У том случају, максимална истуреност се најједноставније и у потпуности тривијално одређује тако што се једна од сила (рецимо F_1 од пет поменутих) прогласи независном променљивом. Тада се екстрем лако добија применом *аритметичко-геометријске* неједнакости. Насупрот томе, уколико се као независна променљива уведе нека од четири непознате дужине: x , y , d_1 , и d_2 , проблем највероватније прелази у домен диференцијалног рачуна.

Домен функције $\Delta\ell_5(F_1)$ мора бити дефинисан као интервал $F_1 \in [mg, 2mg]$, уз задржавање извесних резерви према крајњим тачкама због практичне реализације. У противном, друге непознате не би биле адекватно дефинисане, тј. не би имале физичког смисла. У граничним тачкама домена $\Delta\ell_5(mg) = \Delta\ell_5(2mg) = d/8$. Као закључак, случај (2, 2) за разлику од преосталих дефинитивно даје континуум истурености са јасно дефинисаним и јединственим максимумом у $F_1 = mg\sqrt{2}$. Иначе, није тешко увидети да су поједине функције симетричне у односу на тачку $F_1 = 3mg/2$, попут: $d_2(F_1) \leftrightarrow d - d_2(F_1)$, $d_1(F_1) \leftrightarrow x(F_1)$, $F_1 \leftrightarrow f_2(F_1)$, $f_1(F_1) \leftrightarrow \mathcal{F}(F_1)$, као и десна $\leftrightarrow$ лева истуреност књига у односу на ивицу стола. Ипак, ове функције истурености не досежу своје максимуме за исто F_1 (исте су им вредности максимума, али десне у $F_1 = mg\sqrt{2}$, а леве у $F_1 = mg(3 - \sqrt{2})$), но њихов збир постаје највећи за $F_1 = 3mg/2$.

Током постављања и решавања овог проблема коришћене су референце наведене у одељку испод. За дужину књиге узета је вредност $d = 24$ cm, не само зато што она одговара типичним димензијама књига, већ и зато што представља најмањи заједнички садржалац карактеристичних целих бројева који се појављују у решењу.

Литература

- [1] S. Ainley, The Mathematical Gazette **63**, 272 (1979).
- [2] J. E. Drummond, The Mathematical Gazette **65**, 40 (1981).
- [3] J. F. Hall, American Journal of Physics **73**, 1107 (2005).
- [4] B. L. Lan and L. J. N. Jones, Physics Education **40**, 204 (2005).