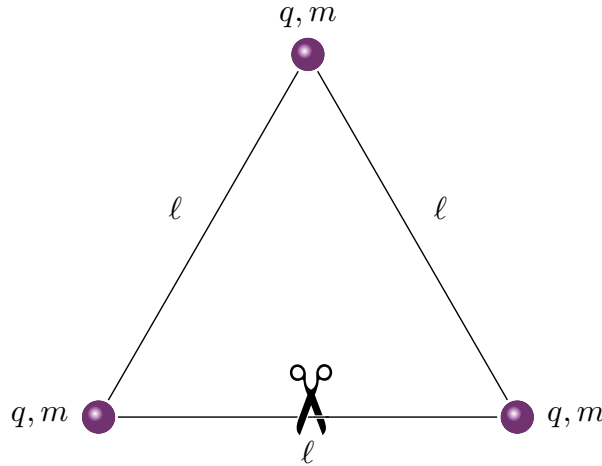


Нумеричка пустиловина три наелектрисане куглице – *triviale in speciem*¹

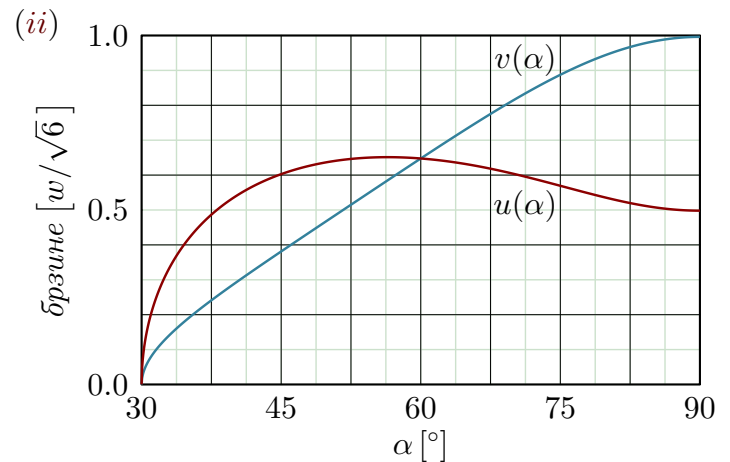
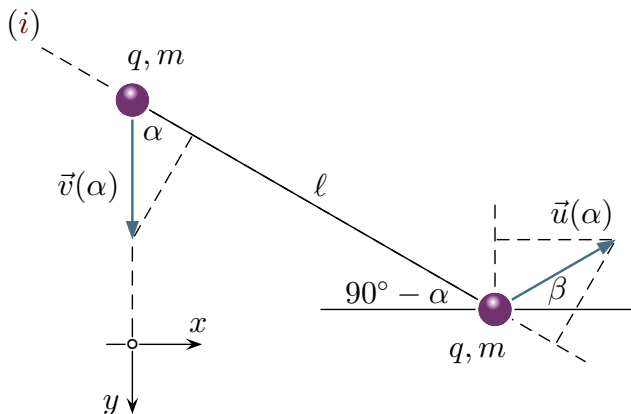
Три идентичне позитивно наелектрисане куглице, свака масе m и наелектрисања q , повезане су међусобно преко три неистегљиве непроводне нити истих дужина ℓ , без масе. Куглице леже на глатком хоризонталном столу у вакууму затежући нити и формирају једнакостранични троугао, видети слику. У једном тренутку пресеке се једна нит између две куглице. Наћи вредности максималних брзина које свака куглица постиже након пресецања.



Задатак решавати у функцији од параметра $w \equiv q/\sqrt{\pi\epsilon_0 m \ell}$ који има димензије брзине, где је ϵ_0 диелектрична пермитивност вакуума. Узети, на пример, да је $w = 100.0$ cm/s. Иако се сличан задатак може наћи у многим школским збиркама, пут до исправног решења није тако праволинијски. Уместо заваривајућег и наизглед тривијалног аналитичког приступа, овај проблем вас води у свет нумеричке прецизности и програмских кодова. (⊗)

Решење

Нека у неком тренутку након пресецања нити куглица која се налази наспрам пресечене нити има тренутну брзину чији је интензитет $v(\alpha)$, а преостале две (свака због симетрије проблема) имају тренутну брзину чији је интензитет $u(\alpha)$, где је α угао који затегнута нит заклапа са y -осом. Видети слику (i). У истом том тренутку вектор брзине $\vec{u}(\alpha)$ заклапа угао β са x -осом.



Како је нит неистегљива и затегнута у сваком тренутку, онда одсуствује пројекција релативне брзине дуж нити, тј.

$$v(\alpha) \cos \alpha = u(\alpha) \cos (90^\circ - \alpha + \beta).$$

¹Латинска фраза која би одговарала значењу да је нешто само на први поглед једноставно, односно да је крајње суптилно и сложено до на детаље.

На основу Закона одржања импулса, који је применљив у овом случају због одсуства спољашњих сила, имамо да је

$$mv(\alpha) = 2mu(\alpha) \sin \beta,$$

а из Закона одржања енергије следи да је

$$\frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\ell} = \frac{1}{2}mv^2(\alpha) + 2 \times \frac{1}{2}mu^2(\alpha) + \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\ell} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2\ell \sin \alpha},$$

што напоследку доводи до релације

$$v^2(\alpha) + 2u^2(\alpha) = \frac{2 \sin \alpha - 1}{4 \sin \alpha} \times w^2.$$

Након краћих трансформација се закључује да важи

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{9 - 8 \sin^2 \alpha}} \Leftrightarrow \tan \beta = 3 \tan \alpha,$$

односно,

$$\frac{v(\alpha)}{w} = \sqrt{\frac{(2 \sin \alpha - 1) \sin \alpha}{6 (3 - 2 \sin^2 \alpha)}} \quad \text{и} \quad \frac{u(\alpha)}{w} = \sqrt{\frac{(2 \sin \alpha - 1) (9 - 8 \sin^2 \alpha)}{24 (3 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha}},$$

при чему је фокус на домену $\alpha \in [30^\circ, 90^\circ]$.

График зависности $v(\alpha)$ и $u(\alpha)$ за $w = 100.0$ cm/s је дат на слици (ii). Примећујемо да се за $\alpha = 60^\circ$ налази да је $\beta = 30^\circ$, док су вредности обе брзине једнаке. Даље, лако се уочава да брзина $v(\alpha)$ досеже свој максимум за $\alpha = 90^\circ$, тј. када је укупна кинетичка енергија куглица максимална, па је $v^{(\max)} = 100.0/\sqrt{6}$ cm/s = 40.824829... cm/s, при чему се жељени степен прецизности може једноставно подесити избором броја значајних цифара у приказу резултата. Међутим, поступак за проналажење вредности $u^{(\max)}$ је нешто сложенији, јер се резултат не може добити у затвореној аналитичкој форми. Стога ћемо домен $[30^\circ, 90^\circ]$ уситнити кораком step° и на основу тако формираног вектора нумерички претражити вредност брзине која достиже максимум, као што је приказано у доле наведеном коду у R-у. Уколико је то потребно, може се користити [R интерактивна платформа](#) за покретање, уређивање, и компајлирање овог R кода, који на излазу даје следећи резултат:

$$\begin{aligned} \text{step}^\circ &= 10^{-0} \Rightarrow \alpha_{\max} = 56.00000^\circ \ \& \ u^{(\max)} = 26.693000887741... \text{ cm/s}, \\ \text{step}^\circ &= 10^{-1} \Rightarrow \alpha_{\max} = 56.40000^\circ \ \& \ u^{(\max)} = 26.695374709451... \text{ cm/s}, \\ \text{step}^\circ &= 10^{-2} \Rightarrow \alpha_{\max} = 56.43000^\circ \ \& \ u^{(\max)} = 26.695388061779... \text{ cm/s}, \\ \text{step}^\circ &= 10^{-3} \Rightarrow \alpha_{\max} = 56.43300^\circ \ \& \ u^{(\max)} = 26.695388140150... \text{ cm/s}, \\ \text{step}^\circ &= 10^{-4} \Rightarrow \alpha_{\max} = 56.43250^\circ \ \& \ u^{(\max)} = 26.695388142951... \text{ cm/s}, \\ \text{step}^\circ &= 10^{-5} \Rightarrow \alpha_{\max} = 56.43253^\circ \ \& \ u^{(\max)} = 26.695388142962... \text{ cm/s}. \end{aligned}$$

Закључујемо да, у зависности од степена уситњености домена у интервалу од 30° до 90° , може да се унапреди тачност одређивања бројне вредности максималне брзине $u(\alpha)$. Очигледно је да, како се корак уситњавања смањује, добијена бројна вредност максималне брзине $u(\alpha)$ конвергира ка све прецизнијем и стабилнијем резултату.

```
# --- refine-by-step grid search for max of u(alpha) on [30,90] degrees ---
deg2rad<-function(d) d*pi/180
u_vec<-function(alpha_deg)
{
  a<-deg2rad(alpha_deg)
  s<-sin(a)
  val<-((2*s-1)*(9-8*s^2))/(24*(3-2*s^2)*s)
  val[!is.finite(val)|val<0]<-NA_real_
  100*sqrt(val)
}

# --- add more if you like ---
steps<-c(1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001)
low<-30
high<-90
for (step in steps)
{
  alphas<-seq(low, high, by = step)
  uvals<-u_vec(alphas)
  if (all(is.na(uvals))) stop("No valid u values in the interval with step = ", step)
  k<-which.max(uvals)
  best_alpha<-alphas[k]
  best_u<-uvals[k]
  cat(sprintf("step= %g deg->alpha= %.10f deg, u = %.12f\n", step, best_alpha, best_u))
  radius<-step*5
  low<-max(30, best_alpha-radius)
  high<-min(90, best_alpha+radius)
}

# --- results ---
cat(sprintf("\nFinal estimate: alpha_max= %.8f degrees, u = %.12f\n", best_alpha, best_u))
```